



TITLE:

円管の内、および、外の粘性流体  
中を運動する粒子に働く力(ナビエ  
・ストークスの方程式の解)

AUTHOR(S):

篠原, 勝

---

CITATION:

篠原, 勝. 円管の内、および、外の粘性流体中を運動する粒子に働く力  
(ナビエ・ストークスの方程式の解). 数理解析研究所講究録 1984, 510:  
100-117

ISSUE DATE:

1984-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/98311>

RIGHT:

円管の内、および、外の粘性流体中を運動する粒子に働く力

岐阜高専 機械 篠原 勝

(Shinohara Masaru)

### §1 はじめに

産業界、自然界には数多くの低レイノルズ数の流体现象がみられる。低レイノルズ数の現象の中でも、円管を境界とする流れは、生物内部の流体輸送機構、化学工学等に現われるように特に関心が持たれている。円管内の遅い流れの研究は数多くの研究者が取り組んだ問題である。しかし、現象を支配するナビエ・ストークスの方程式の非線形項を、遅い流れの近似として無視したストークス近似では、円管内を進む粒子に働く力を完全には把握できない。特に、速度に関して線形であるストークス方程式において、速度を逆転すると圧力項が逆符号になり、また、進行方向の空間座標を逆転しても方程式が同形なので、球形粒子が存在することによって生ずる誘導流は、進行方向に前後対称となることから、この方程式を用いても、横方向の力を求めることはできない。そこ

で、横方向の移動を説明するためには、何らかの方法で慣性項の影響を取り入れる必要が生ずる。Cox and Brenner<sup>1)</sup> は壁と非一様なシェアの存在を考慮に入れて、初めて完全な Poiseuille 問題を取り扱った。彼らは、管の半径と球の半径の比と、レイノルズ数の二つの微小パラメータを用い、matched asymptotic expansions method によって、球に働く横方向の力とトルクを求めた。この解は、Stokes 方程式の解の Green 関数を被積分関数に含む、非常に複雑な積分形で表わされており、横方向の力の向き、および、径方向の位置における強さを明確には表わしていない。Shinohara and Hasimoto<sup>2)</sup> は円管内の静止流体中を、Ishii and Hasimoto<sup>3)</sup> は Poiseuille 流中を粒子が運動するときに受ける力を、壁が Stokes 領域にあるとして求めた。

また、円管の外部の粘性流体中を軸に平行に進む粒子に働く径方向の力は、Shinohara and Hasimoto<sup>4)</sup> が円管内部の場合と同様の手法で求めている。

本報告では、円筒内外、および、同心二円筒間の粘性流体中を軸に平行に一定速度で運動する微小粒子に働く力を、慣性項の影響を考慮し、特に、円筒壁が粒子にとって Oseen 領域にある場合に着目して求めていく。

## § 2 基礎方程式

円管を境界とする非圧縮粘性流体中を軸と平行に速度  $-U$  で運動する微小球に働く力を  $F$  とする。これを粒子とともに速度  $-U$  で進む系から見れば、円管が速度  $U$  で進んでいるかのように見える。この粒子の位置を  $X_{op} = X_{op}(x_{op}, y_{op}, 0)$  とした系において、流体の速度  $v$  と圧力  $p$  は  $X_{op}$  に point force  $F$  を加えた定常ナビエ・ストークス方程式、および、連続の方程式を満足する。

$$(v \cdot \nabla) v = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{\rho} F \delta(X_0 - X_{op}) + \nu \Delta v, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot v = 0 \quad (2.2)$$

ここで、 $\rho$  と  $\nu$  はそれぞれ流体の密度と動粘性係数である。いま、円管の内、および、外の場合は円管の半径、また、同心二円筒間の場合は二円筒間の距離を  $L$  とし、これと、粘性係数  $\mu$ 、球の速度  $U$  を用いて (2.1), (2.2) 式を無次元化すると

$$R_L (v_i \cdot \nabla) v_i = -\nabla p_i - F_i \delta(X - X_p) + \Delta v_i \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot v_i = 0$$

となる。ここで、つぎの無次元変数、媒介変数を導入した。

$$v_i = \frac{v}{U}, \quad p_i = \frac{p}{\mu \frac{U}{L}}, \quad X = \frac{X_0}{L}, \quad F_i = \frac{F}{\mu U L}, \quad R_L = \frac{U L}{\nu}$$

境界条件は  $|z| \rightarrow \infty$  で  $v_1 \rightarrow e_z$ , 円柱上で  $v_1 = e_z$  である。ここで、 $e_z$  は  $z$  方向の単位ベクトルである。球の半径  $a$  をもとにしたレイノルズ数  $Re = Ua/\nu$  が十分小さければ、無次元化した球に働く力の第1近似はストークスの抵抗法則により  $6\pi\varepsilon$  となる。ここで、 $\varepsilon$  は無次元化した球の半径  $a/L$  である。物体にとって遠方では、物体が存在することによって誘導される速度は一様流に比べ十分小さいと考えられる。そこで、微小量である  $\varepsilon$  を用いて、 $v_1, p_1, F_1$  を次のように展開する。

$$v_1 = e_z + \varepsilon v_2 + O(\varepsilon^2),$$

$$p_1 = \varepsilon p_2 + O(\varepsilon^2),$$

$$F_1 = 6\pi\varepsilon e_z + O(\varepsilon^2).$$

これを、(2.3), (2.4) 式に代入し、 $O(\varepsilon)$  までを考慮すると、

$$(\Delta - Re \frac{\partial}{\partial z}) v_2 = \nabla p_2 + 6\pi e_z \delta(x - x_p), \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot v_2 = 0, \quad (2.6)$$

が導かれる。

境界条件は  $|z| \rightarrow \infty$  で  $v_2 \rightarrow 0$ , 円筒上で  $v_2 = 0$  である。

### § 3 球による1次誘導流

(2.5) 式の両辺に  $\text{div}$  を作用させ、(2.6) 式を用いると、

$$\Delta p_2 = -6\pi \frac{\partial}{\partial z} \delta(x - x_p), \quad (3.1)$$

が求まる。

$$p_2 = -6\pi \frac{\partial}{\partial z} \phi, \quad (3.2)$$

とおき、球による1次誘導速度を  $v_{2p}$  と表わすと、(2.5),

(3.1) 式はそれぞれ

$$(\Delta - R_L \frac{\partial}{\partial z}) v_{2p} = -6\pi \frac{\partial}{\partial z} \nabla \phi + 6\pi e_z \delta(x - x_p), \quad (3.3)$$

$$\Delta \phi = \delta(x - x_p), \quad (3.4)$$

となる。(3.3) 式は  $v_{2p}$  に関して線形であるから、

$$(\Delta - R_L \frac{\partial}{\partial z}) v_{21p} = -6\pi \frac{\partial}{\partial z} \nabla \phi, \quad (3.5)$$

$$(\Delta - R_L \frac{\partial}{\partial z}) v_{22p} = 6\pi e_z \delta(x - x_p), \quad (3.6)$$

を解くことによって、 $v_{2p}$  が

$$v_{2p} = v_{21p} + v_{22p},$$

と求まる。(3.5), (3.6) 式を解くためにあらたに  $G$ ,  $\psi$  を

導入し、 $v_{21p}$ ,  $v_{22p}$  を

$$v_{21p} = -6\pi \nabla G, \quad (3.8)$$

$$v_{22p} = 6\pi e_z \psi, \quad (3.9)$$

と表わすと、(3.5), (3.6) 式はそれぞれ

$$(\Delta - R_L \frac{\partial}{\partial z}) G = \frac{\partial}{\partial z} \phi, \quad (3.10)$$

$$(\Delta - R_L \frac{\partial}{\partial z}) \psi = \delta(X - X_p), \quad (3.11)$$

となる。(3.4)式を用いると、(3.10), (3.11)式より

$$G = \frac{1}{R_L} (\psi - \phi) \quad (3.12)$$

が求まる。(3.8), (3.9), (3.10)式より、 $v_{zp}$ が(3.4), (3.11)式を満足する $\psi$ ,  $\phi$ を用いて

$$v_{zp} = -\frac{6\pi}{R_L} \nabla(\psi - \phi) + 6\pi e_z \psi, \quad (3.13)$$

と表わされる。(3.4), (3.11)式を、管軸を $z$ 軸とした円柱座標 $(r, \theta, z)$ で表わし、 $\phi$ ,  $\psi$ のFourier変換 $\tilde{\phi}_n$ ,  $\tilde{\psi}_n$

$$\tilde{\phi}_n(r, n, \lambda) \equiv \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(r, \theta, z) e^{-i\lambda z - in\theta} dz d\theta \quad (3.14)$$

$$\tilde{\psi}_n(r, n, \lambda) \equiv \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(r, \theta, z) e^{-i\lambda z - in\theta} dz d\theta \quad (3.15)$$

を導入すると、

$$L_r(\tilde{\phi}_n) \equiv \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\tilde{\phi}_n}{dr} \right) - \left( \frac{n^2}{r} + r\lambda^2 \right) \tilde{\phi}_n = \frac{r}{r_p} \delta(r - r_p), \quad (3.16)$$

$$L_2(\tilde{\psi}_n) \equiv \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\tilde{\psi}_n}{dr} \right) - \left\{ \frac{n^2}{r} + r(\lambda^2 + i\lambda R_L) \right\} \tilde{\psi}_n = \frac{r}{r_p} \delta(r - r_p), \quad (3.17)$$

と、 $r$ に関する常微分方程式となる。 $L_1(\tilde{\phi}_n) = 0$ ,  $L_2(\tilde{\psi}_n) = 0$ は変形されたベッセルの微分方程式である。境界条件を満足する解は、

$$\tilde{\phi}_n = \begin{cases} -I_n(\beta r_p) K_n(\beta r), & (r_p < r) \\ -I_n(\beta r) K_n(\beta r_p), & (r < r_p) \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\tilde{\psi}_n = \begin{cases} -I_n(\hat{\beta} r_p) K_n(\hat{\beta} r), & (r_p < r) \\ -I_n(\hat{\beta} r) K_n(\hat{\beta} r_p), & (r < r_p) \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\beta = |\lambda|, \quad \hat{\beta} = \sqrt{\lambda^2 + i\lambda R_L}$$

となる。 $\tilde{\phi}_n$ ,  $\tilde{\psi}_n$ を逆変換し、(3.13)式に代入すれば、球による1次誘導速度 $v_{2p}$ が次のように求まる。

$$v_{2p} = \begin{cases} \frac{3}{2\pi R_L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \left\{ \hat{\beta} I_n(\hat{\beta} r_p) \dot{K}_n(\hat{\beta} r) - \beta I_n(\beta r_p) \dot{K}_n(\beta r) \right\} \mathbf{e}_r \right. \\ \quad + \frac{in}{r} \left\{ I_n(\hat{\beta} r_p) K_n(\hat{\beta} r) - I_n(\beta r_p) K_n(\beta r) \right\} \mathbf{e}_\theta \\ \quad \left. + \frac{i}{\lambda} \left\{ \hat{\beta}^2 I_n(\hat{\beta} r_p) K_n(\hat{\beta} r) - \beta^2 I_n(\beta r_p) K_n(\beta r) \right\} \mathbf{e}_z \right] e^{i\lambda z + in\theta} d\lambda, \\ \quad (r_p < r) \\ \frac{3}{2\pi R_L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \left\{ \hat{\beta} \dot{I}_n(\hat{\beta} r) K_n(\hat{\beta} r_p) - \beta \dot{I}_n(\beta r) K_n(\beta r_p) \right\} \mathbf{e}_r \right. \\ \quad + \frac{in}{r} \left\{ I_n(\hat{\beta} r) K_n(\hat{\beta} r_p) - I_n(\beta r) K_n(\beta r_p) \right\} \mathbf{e}_\theta \\ \quad \left. + \frac{i}{\lambda} \left\{ \hat{\beta}^2 I_n(\hat{\beta} r) K_n(\hat{\beta} r_p) - \beta^2 I_n(\beta r) K_n(\beta r_p) \right\} \mathbf{e}_z \right] e^{i\lambda z + in\theta} d\lambda, \\ \quad (r < r_p). \end{cases} \quad (3.20)$$



#### § 4 壁による2次誘導流

円筒壁での境界条件を満足させるためには、球による1次誘導流に、特異点をもたない、壁による2次誘導流を重ね合わせるなければならない。本章において、円筒内外、同心二円筒間のそれぞれの場合について、この2次誘導流の速度を求める。2次誘導速度  $v_{2h}$  は次の各次微分方程式を満足する。

$$(\Delta - R_L \frac{\partial}{\partial z}) v_{2h} = \nabla p. \quad (4.1)$$

上式の両辺に  $\text{div}$  を作用させたものを円柱座標で表わし、さらに、Fourier 変換すると

$$(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} - \lambda^2) \tilde{p}(r, n, \lambda) = 0, \quad (4.2)$$

となる。ここで、 $\tilde{p}$  は  $p$  の Fourier 変換である。

円管内の場合は、軸上 ( $r=0$ ) で収束する条件を (4.2) 式に付加しなければならない。そのとき解は次のようになる。

$$\tilde{p} = C_p \ln(\beta r). \quad (4.3)$$

ここで、 $C_p$  は定数である。上式の逆変換を (4.1) に代入し、 $v_{2h}$  の  $r, \theta, z$  成分の Fourier 変換をそれぞれ  $\tilde{v}_{2hr}, \tilde{v}_{2h\theta}, \tilde{v}_{2hz}$  で表わすと、(4.1) 式の  $r, \theta, z$  成分に関する次の3式が導かれる。

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{d^2}{dr^2} - \frac{n^2+1}{r^2} - (\lambda^2 + i\lambda R_L) \right\} \tilde{v}_{2hr} - \frac{2in}{r^2} \tilde{v}_{2h\theta} \\ = \beta C_p \left( \pm \frac{n}{\beta r} I_n(\beta r) + I_{n\pm 1}(\beta r) \right), \quad (4.4)$$

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{d^2}{dr^2} - \frac{n^2+1}{r^2} - (\lambda^2 + i\lambda R_L) \right\} \tilde{v}_{2h\theta} + \frac{2in}{r^2} \tilde{v}_{2hr} \\ = \frac{in}{r} C_p I_n(\beta r) \quad (4.5)$$

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{d^2}{dr^2} - \frac{n^2}{r^2} - (\lambda^2 + i\lambda R_L) \right\} \tilde{v}_{2hz} = i\lambda C_p I_n(\beta r) \quad (4.6)$$

(4.4), (4.5) 式より  $\tilde{v}_{2hr}$ ,  $\tilde{v}_{2h\theta}$  が次のように求まる。

$$\tilde{v}_{2hr} = A_1 I_{n+1}(\hat{\beta}r) + B_1 I_{n-1}(\hat{\beta}r) + C_1 (I_{n+1}(\beta r) + I_{n-1}(\beta r)), \quad (4.7)$$

$$\tilde{v}_{2h\theta} = -iA_1 I_{n+1}(\hat{\beta}r) + iB_1 I_{n-1}(\hat{\beta}r) - iC_1 (I_{n+1}(\beta r) - I_{n-1}(\beta r)). \quad (4.8)$$

ここで、 $A, B, C$  は定数である。(4.6) 式より  $\tilde{v}_{2hz}$  を求め、連続の方程式(2.6)に、求めた  $\tilde{v}_{2hr}$ ,  $\tilde{v}_{2h\theta}$ ,  $\tilde{v}_{2hz}$  を代入し、 $\tilde{v}_{2hz}$  に含まれていた未定係数を  $A_1, B_1, C_1$  を用いて表わすと、

$$\tilde{v}_{2hz} = \frac{i\hat{\beta}}{\lambda} (A_1 + B_1) I_n(\hat{\beta}r) + \frac{2i\beta}{\lambda} C_1 I_n(\beta r) \quad (4.9)$$

が求まる。

円管外の場合は、無限遠 ( $r \rightarrow \infty$ ) で収束する条件を(4.2) 式に付加しなければならない。そのとき、解は第2種変形ベッセル関数を用いて表わされる。円管内で用いた方法と同様にして、Fourier変換した円管外の2次誘導速度の  $r, \theta, z$

成分はそれぞれ次のようになる。

$$\tilde{v}_{2hr} = A_2 K_{n+1}(\hat{\beta}r) + B_2 K_{n-1}(\hat{\beta}r) + C_2 (K_{n+1}(\beta r) - K_{n-1}(\beta r)), \quad (4.10)$$

$$\tilde{v}_{2h\theta} = -iA_2 K_{n+1}(\hat{\beta}r) + iB_2 K_{n-1}(\hat{\beta}r) - iC_2 (K_{n+1}(\beta r) - K_{n-1}(\beta r)), \quad (4.11)$$

$$\tilde{v}_{2hz} = -\frac{i\hat{\beta}}{\lambda} (A_2 + B_2) I_n(\hat{\beta}r) - \frac{2i\beta}{\lambda} C_2 I_n(\beta r). \quad (4.12)$$

同心二円筒間の場合は、(4.2) 式を満足する解は、

$$\tilde{p} = d_{p1} I_n(\beta r) + d_{p2} K_n(\beta r), \quad (4.13)$$

と表わされる。円筒内外の場合と同様にして、Fourier 変換した二次誘導速度の  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$  成分はそれぞれ次のように求まる。

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{2hr} = & A_3 I_{n+1}(\hat{\beta}r) + B_3 I_{n-1}(\hat{\beta}r) + A_4 K_{n+1}(\hat{\beta}r) + B_4 K_{n-1}(\hat{\beta}r) \\ & + C_3 (I_{n+1}(\beta r) + I_{n-1}(\beta r)) + C_4 (K_{n+1}(\beta r) + K_{n-1}(\beta r)), \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{2h\theta} = & i \{ -A_3 I_{n+1}(\hat{\beta}r) + B_3 I_{n-1}(\hat{\beta}r) - A_4 K_{n+1}(\hat{\beta}r) + B_4 K_{n-1}(\hat{\beta}r) \\ & + C_3 (I_{n-1}(\beta r) - I_{n+1}(\beta r)) + C_4 (K_{n-1}(\beta r) - K_{n+1}(\beta r)) \}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{2hz} = & \frac{i}{\lambda} \{ (A_3 + B_3) \hat{\beta} I_n(\hat{\beta}r) - (A_4 + B_4) \hat{\beta} K_n(\hat{\beta}r) \\ & + 2\beta C_3 I_n(\beta r) - 2\beta C_4 K_n(\beta r) \}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

## § 5 粒子に働く力

§ 4 で求めた壁による 2 次誘導流は、遠方場から見て粒子の近傍、粒子から見て遠方の流れの場として、物体近傍の流れに対する新しい境界条件を与える。この条件により、物体には付加的な力が加わる。この付加的な力を *point force* として同様の手続きを繰り返せば、さらに付加的な力が加わる。しかし、*point force* による誘導流は、距離の逆数以下で減衰するので、付加的な力は一段階前の *point force* に  $O(\varepsilon/l)$ , ( $l$  は無次元化した壁と球の距離) を乗じた大きさになる。したがって、最初の付加的な力のみを考慮すれば十分良い近似が得られるであろう。Vasseur and Cox<sup>5)</sup> は無限平板に境された流体中を板に平行に進行する球に働く力を、球の近傍を Stokes 方程式で解き、球から遠く離れた領域を Oseen 方程式で解き、両方の流れを接合することによって求めている。すなわち、Oseen 領域にある壁による誘導流が求まれば、Stokes 領域にある粒子に働く力は、この流れに Stokes の抵抗法則を適用したものになることを示している。そこで、壁での粘着の条件より 2 次誘導速度  $v_{2h}$  の表式中の未定係数を定め、球の位置での  $v_{2h}$  を求めることにより、球に働く付加的な力を求めていく。

壁では、粘着の条件により、1 次誘導速度  $v_{2p}$  と 2 次誘導

速度  $v_{zn}$  の和は 0 となる。円管内の場合、この条件を各成分に分けると次の 3 式になる。

$$A_1 I_{n+1}(\hat{\beta}) + B_1 I_{n-1}(\hat{\beta}) + C_1 (I_{n+1}(\beta) + I_{n-1}(\beta)) \\ + \frac{6\pi}{R_L} \left\{ \hat{\beta} I_n(\hat{\beta} r_p) \dot{K}_n(\hat{\beta}) - \beta I_n(\beta r_p) \dot{K}_n(\beta) \right\} = 0, \quad (5.1)$$

$$-A_1 I_{n+1}(\hat{\beta}) + B_1 I_{n-1}(\hat{\beta}) - C_1 (I_{n+1}(\beta) - I_{n-1}(\beta)) \\ + \frac{6\pi}{R_L} \frac{n}{r} \left\{ I_n(\hat{\beta} r_p) K_n(\hat{\beta}) - I_n(\beta r_p) K_n(\beta) \right\} = 0, \quad (5.2)$$

$$\hat{\beta} A_1 I_n(\hat{\beta}) + \hat{\beta} B_1 I_n(\hat{\beta}) + 2\beta C_1 I_n(\beta) \\ + \frac{6\pi}{R_L} \left\{ \hat{\beta}^2 I_n(\hat{\beta} r_p) K_n(\hat{\beta}) - \beta^2 I_n(\beta r_p) K_n(\beta) \right\} = 0. \quad (5.3)$$

現象は  $\theta$  に関して対称だから、粒子の位置での 2 次誘導速度は  $v_{zn} (v_r^{(2)}, 0, v_z^{(2)})$  と表わせる。(5.1) ~ (5.3) 式より  $A_1, B_1, C_1$  を定めると、 $v_r^{(2)}, v_z^{(2)}$  が次のように求まる。

$$v_r^{(2)} = \frac{3}{2\pi R_L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \hat{\beta} I_n(\hat{\beta} r_p) \dot{K}_n(\hat{\beta}) - \beta I_n(\beta r_p) \dot{K}_n(\beta) \right. \\ \left. + n (I_n(\beta r_p) K_n(\beta) - I_n(\hat{\beta} r_p) K_n(\hat{\beta})) \right\} \\ \times \left\{ I_{n-1}(\hat{\beta}) (\beta I_n(\beta) \dot{I}_n(\hat{\beta} r_p) - \hat{\beta} I_n(\hat{\beta}) \dot{I}_n(\beta r_p)) \right. \\ \left. - \frac{n}{r_p} I_n(\hat{\beta} r_p) \left( \frac{\beta}{\hat{\beta}} I_{n-1}(\hat{\beta}) I_n(\beta) - I_{n-1}(\beta) I_n(\hat{\beta}) \right) \right\} \\ + \left\{ \hat{\beta} I_n(\hat{\beta} r_p) \dot{K}_n(\hat{\beta}) - \beta I_n(\beta r_p) \dot{K}_n(\beta) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& -n \{ I_n(\beta r_p) K_n(\beta) - I_n(\hat{\beta} r_p) K_n(\hat{\beta}) \} \\
& \times \{ I_{n+1}(\hat{\beta}) (\beta \dot{I}_n(\beta) \dot{I}_n(\hat{\beta} r_p) - \hat{\beta} \dot{I}_n(\hat{\beta}) \dot{I}_n(\beta r_p)) \\
& + \frac{n}{r_p} I_n(\hat{\beta} r_p) (\frac{\beta}{\hat{\beta}} I_{n+1}(\hat{\beta}) I_n(\beta) - I_{n+1}(\beta) I_n(\hat{\beta})) \} \\
& + \{ \beta^2 I_n(\beta r_p) K_n(\beta) - \hat{\beta}^2 I_n(\hat{\beta} r_p) K_n(\hat{\beta}) \} \\
& \times \{ I_{n-1}(\hat{\beta}) (I_{n+1}(\beta) I_{n+1}(\hat{\beta} r_p) - I_{n+1}(\hat{\beta}) I_{n+1}(\beta r_p)) \\
& + I_{n+1}(\hat{\beta}) (I_{n-1}(\beta) I_{n-1}(\hat{\beta} r_p) - I_{n-1}(\hat{\beta}) I_{n-1}(\beta r_p)) \} \cdot \frac{1}{E_1} d\lambda, \\
& \hspace{15em} (5.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_z^{(2)} = & \frac{3}{2\pi R_L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \beta \hat{\beta} I_{n-1}(\hat{\beta}) (I_n(\beta) I_n(\hat{\beta} r_p) - I_n(\hat{\beta}) I_n(\beta r_p)) \right. \\
& \times (-\beta \dot{I}_n(\beta r_p) \dot{K}_n(\beta) + \hat{\beta} \dot{I}_n(\hat{\beta} r_p) \dot{K}_n(\hat{\beta}) + n I_n(\beta r_p) K_n(\beta) - n I_n(\hat{\beta} r_p) K_n(\hat{\beta})) \\
& + \beta \hat{\beta} I_{n+1}(\hat{\beta}) (I_n(\beta) I_n(\hat{\beta} r_p) - I_n(\hat{\beta}) I_n(\beta r_p)) \\
& \times \{-\beta \dot{I}_n(\beta r_p) \dot{K}_n(\beta) + \hat{\beta} \dot{I}_n(\hat{\beta} r_p) \dot{K}_n(\hat{\beta}) - n I_n(\beta r_p) K_n(\beta) + n I_n(\hat{\beta} r_p) K_n(\hat{\beta})\} \\
& + (\beta^2 I_n(\beta r_p) K_n(\beta) - \hat{\beta}^2 I_n(\hat{\beta} r_p) K_n(\hat{\beta})) \\
& \times (\hat{\beta} I_{n-1}(\hat{\beta}) I_{n+1}(\beta) I_n(\hat{\beta} r_p) + \hat{\beta} I_{n+1}(\hat{\beta}) I_{n-1}(\beta) I_n(\hat{\beta} r_p) - \beta I_{n+1}(\beta) I_{n-1}(\hat{\beta}) I_n(\beta r_p)) \} \\
& \times \frac{1}{E_1 \lambda} d\lambda, \quad (5.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_1 \equiv & \hat{\beta} I_{n-1}(\hat{\beta}) I_n(\hat{\beta}) I_{n+1}(\beta) + \hat{\beta} I_{n-1}(\beta) I_n(\hat{\beta}) I_{n+1}(\hat{\beta}) \\
& - 2\beta I_{n-1}(\hat{\beta}) I_n(\beta) I_{n+1}(\hat{\beta}), \quad (5.7)
\end{aligned}$$

円管内の場合と同様にして、円管外の  $U_r^{(2)}$ ,  $U_z^{(2)}$  が次のように求まる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_r^{(2)} = & \frac{3}{2\pi R_L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \hat{\beta} K_n(\hat{\beta} r_p) \dot{I}_n(\hat{\beta}) - \beta K_n(\beta r_p) \dot{I}_n(\beta) \right. \\
& \left. - n (K_n(\hat{\beta} r_p) I_n(\hat{\beta}) - K_n(\beta r_p) I_n(\beta)) \right\} \\
& \times \left\{ K_{n-1}(\hat{\beta}) (\beta K_n(\beta) \dot{K}_n(\hat{\beta} r_p) - \hat{\beta} K_n(\hat{\beta}) \dot{K}_n(\beta r_p)) \right. \\
& \left. - \frac{n}{r_p} K_n(\hat{\beta} r_p) \left( \frac{\beta}{\hat{\beta}} K_{n-1}(\hat{\beta}) K_n(\beta) - K_{n-1}(\beta) K_n(\hat{\beta}) \right) \right\} \\
& + \left\{ \hat{\beta} K_n(\hat{\beta} r_p) \dot{I}_n(\hat{\beta}) - \beta K_n(\beta r_p) \dot{I}_n(\beta) \right. \\
& \left. + n (K_n(\hat{\beta} r_p) I_n(\hat{\beta}) - K_n(\beta r_p) I_n(\beta)) \right\} \\
& \times \left\{ K_{n+1}(\hat{\beta}) (\beta K_n(\beta) \dot{K}_n(\hat{\beta} r_p) - \hat{\beta} K_n(\hat{\beta}) \dot{K}_n(\beta r_p)) \right. \\
& \left. + \frac{n}{r_p} K_n(\hat{\beta} r_p) \left( \frac{\beta}{\hat{\beta}} K_{n+1}(\hat{\beta}) K_n(\beta) - K_{n+1}(\beta) K_n(\hat{\beta}) \right) \right\} \\
& + \left\{ \beta^2 K_n(\beta r_p) I_n(\beta) - \hat{\beta}^2 K_n(\hat{\beta} r_p) I_n(\hat{\beta}) \right\} \\
& \times \left\{ K_{n-1}(\hat{\beta}) (K_{n+1}(\beta) K_{n+1}(\hat{\beta} r_p) - K_{n+1}(\hat{\beta}) K_{n+1}(\beta r_p)) \right. \\
& \left. + K_{n+1}(\hat{\beta}) (K_{n-1}(\beta) K_{n-1}(\hat{\beta} r_p) - K_{n-1}(\hat{\beta}) K_{n-1}(\beta r_p)) \right\} \frac{1}{E_2} d\lambda, \quad (5.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_z^{(2)} = & \frac{3}{2\pi R_L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \beta \hat{\beta} K_{n-1}(\hat{\beta}) (K_n(\beta) K_n(\hat{\beta} r_p) - K_n(\hat{\beta}) K_n(\beta r_p)) \right. \\
& \times (-\beta K_n(\beta r_p) \dot{I}_n(\beta) + \hat{\beta} K_n(\hat{\beta} r_p) \dot{I}_n(\hat{\beta}) + n K_n(\beta r_p) I_n(\beta) - n K_n(\hat{\beta} r_p) I_n(\hat{\beta})) \\
& + \beta \hat{\beta} K_{n+1}(\hat{\beta}) (K_n(\beta) K_n(\hat{\beta} r_p) - K_n(\hat{\beta}) K_n(\beta r_p)) \\
& \times (-\beta K_n(\beta r_p) \dot{I}_n(\beta) + \hat{\beta} K_n(\hat{\beta} r_p) \dot{I}_n(\hat{\beta}) - n K_n(\beta r_p) I_n(\beta) - n K_n(\hat{\beta} r_p) I_n(\hat{\beta})) \\
& + (\hat{\beta}^2 K_n(\hat{\beta} r_p) I_n(\hat{\beta}) - \beta^2 K_n(\beta r_p) I_n(\beta)) \\
& \times (\hat{\beta} K_{n-1}(\hat{\beta}) K_{n+1}(\beta) K_n(\hat{\beta} r_p) + \hat{\beta} K_{n+1}(\hat{\beta}) K_{n-1}(\beta) K_n(\hat{\beta} r_p) \\
& \left. - 2 \beta K_{n+1}(\hat{\beta}) K_{n-1}(\hat{\beta}) K_n(\beta r_p) \right\} \frac{1}{E_2} d\lambda, \quad (5.9)
\end{aligned}$$

$$E_2 \equiv 2\beta K_{n+1}(\hat{\beta}) K_{n-1}(\hat{\beta}) K_n(\beta) - \hat{\beta} K_n(\hat{\beta}) K_{n-1}(\hat{\beta}) K_{n+1}(\beta) \\ - \hat{\beta} K_n(\hat{\beta}) K_{n+1}(\hat{\beta}) K_{n-1}(\beta). \quad (5.10)$$

同心二円筒間の場合は、外側と内側の両方で境界条件を満足させなければならない。無次元化した内側の円筒の半径を  $h$  とすれば、外側の円筒上での粘着の条件は

$$A_3 I_{n+1}(\xi) + B_3 I_{n-1}(\xi) + A_4 K_{n+1}(\xi) + B_4 K_{n-1}(\xi) \\ + C_3 (I_{n+1}(\zeta) + I_{n-1}(\zeta)) + C_4 (K_{n-1}(\zeta) - K_{n+1}(\zeta)) \\ = \frac{6\pi}{R_L} (\beta I_n(\beta r_p) \dot{K}_n(\zeta) - \hat{\beta} I_n(\hat{\beta} r_p) \dot{K}_n(\hat{\xi})), \quad (5.11)$$

$$-A_3 I_{n+1}(\xi) + B_3 I_{n-1}(\xi) - A_4 K_{n+1}(\xi) + B_4 K_{n-1}(\xi) \\ + C_3 (I_{n-1}(\zeta) - I_{n+1}(\zeta)) + C_4 (K_{n-1}(\zeta) - K_{n+1}(\zeta)) \\ = \frac{6\pi}{R_L} \frac{\zeta n}{h+1} (I_n(\beta r_p) K_n(\zeta) - \hat{I}_n(\hat{\beta} r_p) K_n(\hat{\xi})), \quad (5.12)$$

$$\hat{\beta} \{ (A_3 + B_3) I_n(\hat{\xi}) - (A_4 + B_4) K_n(\hat{\xi}) \} + 2\beta (C_3 I_n(\zeta) - C_4 K_n(\zeta)) \\ = \frac{6\pi}{R_L} (\beta^2 I_n(\beta r_p) K_n(\zeta) - \hat{\beta}^2 I_n(\hat{\beta} r_p) K_n(\hat{\xi})), \quad (5.13)$$

となる。ここで  $\zeta = \beta(1+h)$ ,  $\hat{\xi} = \hat{\beta}(1+h)$  である。

内側の円筒上での粘着の条件は、(5.11)~(5.13)式において、変数  $\zeta$ ,  $\hat{\xi}$  を  $\eta = \beta h$ ,  $\hat{\eta} = \hat{\beta} h$  に置き換え、(5.12)式右辺の分母  $h+1$  を  $h$  と置き換えた次式になる。



$$\begin{aligned}
& A_3 I_{n+1}(\hat{\eta}) + B_3 I_{n-1}(\hat{\eta}) + A_4 K_{n+1}(\hat{\eta}) + B_4 K_{n-1}(\hat{\eta}) \\
& + C_3 (I_{n+1}(\eta) + I_{n-1}(\eta)) + C_4 (K_{n-1}(\eta) - K_{n+1}(\eta)) \\
& = \frac{6\pi}{R_L} (\beta I_n(\beta r_p) \dot{K}_n(\eta) - \hat{\beta} I_n(\hat{\beta} r_p) \dot{K}_n(\hat{\eta})), \quad (5.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -A_3 I_{n+1}(\hat{\eta}) + B_3 I_{n-1}(\hat{\eta}) - A_4 K_{n+1}(\hat{\eta}) + B_4 K_{n-1}(\hat{\eta}) \\
& + C_3 (I_{n-1}(\eta) - I_{n+1}(\eta)) + C_4 (K_{n-1}(\eta) - K_{n+1}(\eta)) \\
& = \frac{6\pi}{R_L} \frac{\ln}{h} (I_n(\beta r_p) K_n(\eta) - I_n(\hat{\beta} r_p) K_n(\hat{\eta})), \quad (5.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \hat{\beta} \{ (A_3 + B_3) I_n(\hat{\eta}) - (A_4 + B_4) K_n(\hat{\eta}) \} + 2\beta (C_3 I_n(\eta) - C_4 K_n(\eta)) \\
& = \frac{6\pi}{R_L} (\beta^2 I_n(\beta r_p) K_n(\eta) - \hat{\beta}^2 I_n(\hat{\beta} r_p) K_n(\hat{\eta})). \quad (5.16)
\end{aligned}$$

(5.11) ~ (5.16) 式より  $A_3, A_4, B_3, B_4, C_3, C_4$  を求め、

(4.14), (4.16) 式に代入すれば、 $v_r^{(2)}, v_z^{(2)}$  が求まる。

(5.5), (5.8) 式を数値積分し、 $v_r^{(2)}$  を  $R_L, r_0$  を媒介変数として求めたものが図1である。 $R_L \ll 1$  の結果は、

M. Shinohara and H. Hasimoto<sup>2), 4)</sup> の結果である。

$r_p < 1$  は円筒内の結果で、 $v_r^{(2)}$  は負となり、球は壁から中心軸に向かう力を受ける。 $r_p > 1$  は円筒外の結果で、 $v_r^{(2)}$  は正となり、球は壁から外向きの力を受ける。壁のごく近傍においては、円管壁は一枚の平面壁が存在する場合に近似できる

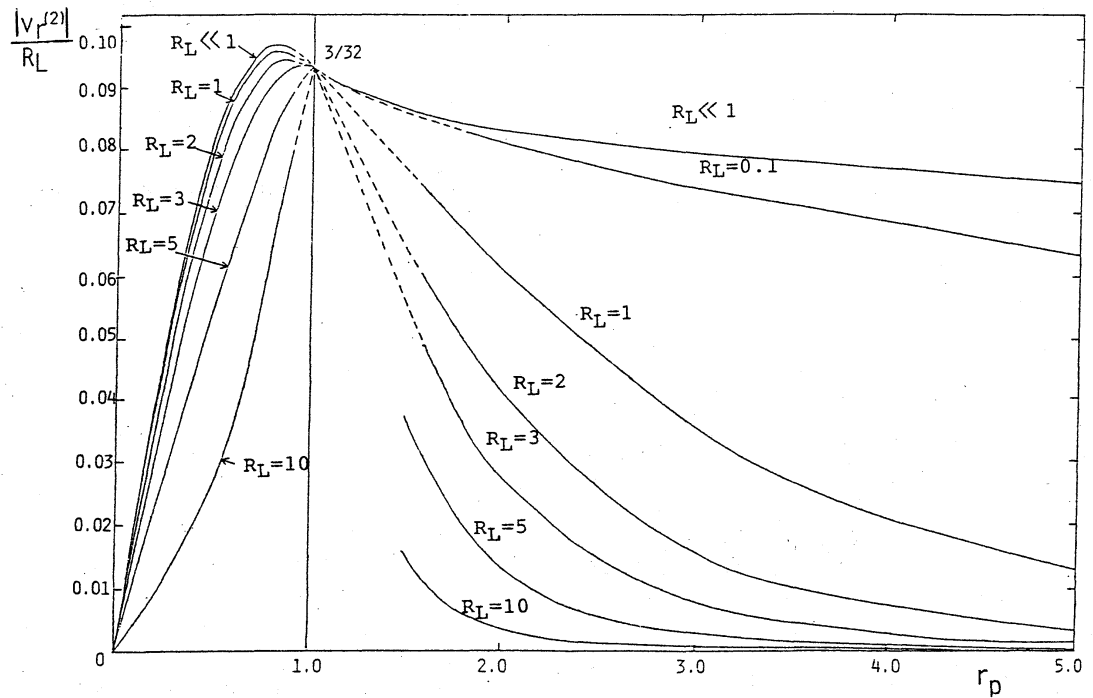


図 1

ので、平面壁近傍での Cox and Hsu<sup>6)</sup> による理論値  $v_r^{(2)}/R_L = 3/32$  に近ずくと考えられる。次元を持った形で表わすと、 $r$  方向の力  $F_r$  は、

$$F_r = 6\pi\mu Ua Ra \frac{v_r^{(2)}}{R_L}$$

となる。図1より、同じ  $Ra$  数であっても、 $R_L$  が大きくなると  $v_r^{(2)}/R_L$  が小さくなり、球の受ける力  $F_r$  が小さくなることかわかる。

軸方向の付加的な力  $F_z^{(2)}$  を次元を持った形で表わすと

$$F_z^{(2)} = 6\pi\mu Ua \varepsilon v_z^{(2)}$$

となる。ストークスの抵抗法則による抗力  $6\pi\mu Ua$  に、 $F_r$

は  $O(Ra)$  を,  $F_z^{(2)}$  は  $O(\varepsilon)$  を集じたものになっている。

## § 6 まとめ

円筒を境界とする粘性流体中を軸と平行に進行する球形粒子に働く径方向、および、軸方向の力を、円筒の内、外、および、同心二円筒間のそれぞれの場合に対して求めた。特に、円筒内、および、外を進行する粒子に働く横向きの方に着目し、複素変数の変形ベッセル関数を含む被積分関数を数値積分することによって、 $R_L = UL/\nu$ , および、球の位置  $r_p$  をパラメータとして求める方法を示した。 $R_L$  が大きな値をもつことは、円柱壁が球にとって *Oseen* 領域に存在していることに対応しているので、この方法を用いれば、球にとって *Oseen* 領域に存在する円筒の軸に沿って粒子が進行している場合にも、粒子に働く径方向の力を求めることができる。

## 文献

- 1) R.G.Cox and H.Brenner Chem.Engng.Sci. 23 (1968) 147
- 2) M.Shinohara and H.Hasimoto J.Phys.Soc.Jpn. 46 (1979) 320
- 3) K.Isii and H.Hasimoto J.Phys.Soc.Jpn. 48 (1980) 2144
- 4) M.Shinohsra and H.Hasimoto J.Phys.Soc.Jpn. 49 (1980) 1162
- 5) P.Vasseur and R.G.Cox J.Fluid Mech. 80 (1977) 561
- 6) G.G.Cox and S.K.Hsu Int.J.Multiphase Flow 3 (1977) 561